CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR ANNEE 1987

DEUXIEME EPREUVE A OPTION MATHEMATIQUES

M

(Durée : 4 h 00 - Coefficient : 10)

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

—==oOOo==—

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ avec l'espace vectoriel des matrices complexes à n lignes et une colonne.

On dit qu'une matrice carrée est *régulière* si, par définition, son déterminant est non nul. Dans le cas contraire, elle est dite *singulière*.

On désigne par Ker A l'ensemble des vecteurs X de $\mathbb{C}^n$ tels que $AX = 0$, par Im A l'ensemble des vecteurs Y de $\mathbb{C}^n$ tels que $\exists X \in \mathbb{C}^n \ / \ Y = AX$ et par I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

I On suppose qu'il existe une matrice diagonalisable $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$A = B\Delta \qquad (*)$$

1°) a) Montrer qu'il existe une base $(X_1,\dots,X_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et une famille $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ de complexes telles que :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\} \quad AX_i = \lambda_i BX_i$$

b) Réciproquement, montrer que, s'il existe une base $(X_1,\dots,X_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et une famille $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ de complexes telles que :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\} \quad AX_i = \lambda_i BX_i$$

alors il existe une matrice diagonalisable $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$A = B\Delta$$

2°) Montrer que :

a) Si B est régulière, $(*) \Leftrightarrow B^{-1}A$ diagonalisable

$(*) \Leftrightarrow AB^{-1}$ diagonalisable

b) Si A est régulière, $(*) \Leftrightarrow A^{-1}B$ diagonalisable

$(*) \Leftrightarrow BA^{-1}$ diagonalisable

c) A régulière $\Rightarrow$ B régulière

3°) Montrer que le complexe λ vérifie la condition :

$$\exists X \neq \vec{0} \quad \text{tel que} \quad AX = \lambda BX$$

si et seulement si λ est racine d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n dont on précisera le coefficient de λ^n et le coefficient constant (en fonction de A et B).

4°) On désigne par S(A,B) l'ensemble $\{ \lambda \in \mathbb{C} \ / \ (A-\lambda B) \text{ singulière} \}$.

Montrer que si $S(A,B) \neq \mathbb{C}$, alors S(A,B) est un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal à n.

5°) On suppose dans cette question $n = 2$

et on note $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

a) Déterminer la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $S(A,B) = \mathbb{C}$.

b) On suppose $S(A,B) = \{\lambda,\mu\}$ avec $\lambda \neq \mu$.

Montrer que si $\text{Ker } A \cap \text{Ker } B = \{\vec{0}\}$, alors il existe une base (X_1,X_2) de $\mathbb{C}^2$ telle que $AX_1 = \lambda BX_1$ et $AX_2 = \mu BX_2$.

c) On suppose $\text{Ker } A = \text{Ker } B \neq \{\vec{0}\}$.

Montrer qu'il existe une base (X_1,X_2) de $\mathbb{C}^2$ telle que :

$$\begin{cases} AX_1 \text{ et } BX_1 \text{ liés} \\ AX_2 \text{ et } BX_2 \text{ liés} \end{cases} \Leftrightarrow A \text{ et } B \text{ liées}$$

II On suppose dans cette partie n quelconque et :

$$\begin{cases} \text{rang}(A) = p < n \\ \text{rang}(B) = q < n \end{cases}$$

1°) Montrer que : $p + q < n \Rightarrow S(A,B) = \mathbb{C}$

Tournez la page S.V.P.

2°) On suppose $p + q = n$.

a) Montrer que : $\text{Ker } A \cap \text{Ker } B \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow S(A,B) = \mathbb{C}$

b) Montrer que si $\text{Ker } A \oplus \text{Ker } B = \mathbb{C}^n$, alors :

$$S(A,B) = \mathbb{C} \Leftrightarrow \text{Im } A \cap \text{Im } B \neq \{\vec{0}\}$$

3°) On suppose $\begin{cases} \text{Ker } A \oplus \text{Ker } B = \mathbb{C}^n \\ \text{Im } A \oplus \text{Im } B = \mathbb{C}^n \end{cases}$

a) Montrer qu'il existe P et Q régulières $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$P^{-1} A Q = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} B Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

b) Montrer que : $S(A,B) = \{0\}$

III On fixe $n = 4$.

1°) Soient les matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer $S(A_1,B_1)$.

b) Déterminer l'ensemble des vecteurs X de $\mathbb{C}^4$ tels que :

$A_1 X$ et $B_1 X$ soient liés

c) Existe-t-il une matrice diagonalisable $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$A_1 = B_1 \Delta$?

2°) Soient les matrices :

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer $S(A_2,B_2)$.

b) Déterminer $S(A_2',B_2)$.

IV La dimension n de l'espace étant à nouveau quelconque, on considère deux matrices symétriques réelles A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans le cas où la matrice B vérifie la propriété suivante :

les valeurs propres de B sont toutes strictement positives

1°) Montrer qu'il existe C inversible $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$B = {}^tC\,C$$

2°) Montrer que :

$$\det(A - \lambda B) = 0 \Leftrightarrow \det({}^tC^{-1} A C^{-1} - \lambda I_n) = 0$$

3°) a) Montrer qu'il existe une base $(X_1,\ldots,X_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\} \quad \exists \lambda_i \in \mathbb{R} \ / \ {}^tC^{-1} A C^{-1} X_i = \lambda_i X_i$$

b) Montrer qu'il existe une base $(Y_1,\ldots,Y_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\} \quad A Y_i \text{ et } B Y_i \text{ soient liés}$$

4°) Montrer qu'il existe P et Q régulières $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$P^{-1} A Q$ et $P^{-1} B Q$ soient diagonales.

—==oOOo==—